

应考方略 数学有数

$0, x_1 > 0, x_2 > 0, y_2 < 0,$

由 $\begin{cases} x=my+2, \\ y^2=2x, \end{cases}$ 得 $y^2-2my-4=0$, 可知 $y_1+y_2=2m, y_1y_2=-4$.

分别过点 M, N 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 E, F ,

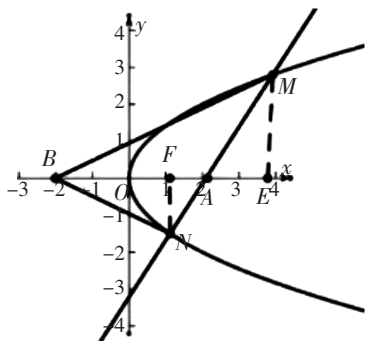
要证 $\angle ABM = \angle ABN$, 即证 $\text{Rt} \triangle BFN \sim \text{Rt} \triangle BEM$, 即证

$\frac{|BF|}{|BE|} = \frac{|NF|}{|ME|}$, 亦即证 $\frac{2+x_2}{2+x_1} = \frac{-y_2}{y_1}$, 即证 $\frac{my_2+4}{my_1+4} = \frac{-y_2}{y_1}$, 亦即证

$(my_2+4)y_1 + (my_1+4)y_2 = 0$.

而 $(my_2+4)y_1 + (my_1+4)y_2 = 2my_1y_2 + 4(y_1+y_2) = -8m + 8m = 0$,

所以 $\angle ABM = \angle ABN$.



解法 6: (对称性法) 通过改进, 巧设直线 l 的方程为: $x=my+2 (m \in \mathbb{R})$, 通过分析, 利用抛物线的对称性, 根据 $\angle ABM = \angle ABN$ 的等价条件为: 点 N 关于 x 轴的对称点 $N'(x_2, -y_2)$ 在直线 BM 上, 利用直线 BM 的方程的求解以及点 N' 的代入, 进而得以证明 $\angle ABM = \angle ABN$.

(1) 同方法 1;

(2) 由于直线 l 的斜率可能不存在但不会为 0, 则可设直线 $l: x=my+2 (m \in \mathbb{R})$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 > 0, x_2 > 0$,

由 $\begin{cases} x=my+2, \\ y^2=2x, \end{cases}$ 得 $y^2-2my-4=0$, 可知 $y_1+y_2=2m, y_1y_2=-4$.

根据抛物线的对称性, $\angle ABM = \angle ABN$ 等价于点 N 关于 x 轴的对称点 $N'(x_2, -y_2)$ 在直线 BM 上.

而直线 BM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$, 要证明点 N' 在直线

BM 上, 只需证明: $-y_2 = \frac{y_1}{x_1+2}(x_2+2)$, 等价于 $x_2y_1 + x_1y_2 + 2(y_1+y_2) = 0$.

而 $x_2y_1 + x_1y_2 + 2(y_1+y_2) = (my_2+2)y_1 + (my_1+2)y_2 + 2(y_1+y_2) = 2my_1y_2 + 4(y_1+y_2) = -8m + 8m = 0$,

所以 $\angle ABM = \angle ABN$.

解法 7: (向量法) 通过改进, 巧设直线 l 的方程为: $x=my+2 (m \in \mathbb{R})$, 通过分析, 利用 $\angle ABM = \angle ABN$ 与对应的向量的数量积中对应的夹角公式的等价转化, 进而得以证明 $\angle ABM = \angle ABN$.

(1) 同方法 1;

(2) 由于直线 l 的斜率可能不存在但不会为 0, 则可设直线 $l: x=my+2 (m \in \mathbb{R})$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 > 0, x_2 > 0$,

由 $\begin{cases} x=my+2, \\ y^2=2x, \end{cases}$ 得 $y^2-2my-4=0$, 可知 $y_1+y_2=2m, y_1y_2=-4$.

由于 $\angle ABM = \angle ABN \Leftrightarrow \cos \angle ABM = \cos \angle ABN \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BM}| |\overrightarrow{BA}|} =$

$$\frac{\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BN}| |\overrightarrow{BA}|} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BM}|} = \frac{\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BN}|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x_1+2)}{\sqrt{(x_1+2)^2 + y_1^2}} = \frac{4(x_2+2)}{\sqrt{(x_2+2)^2 + y_2^2}} \Leftrightarrow (x_1+2)^2 [(x_2+2)^2 + y_2^2] =$$

$$(x_2+2)^2 [(x_1+2)^2 + y_1^2] \Leftrightarrow (x_1+2)^2 \cdot y_2^2 = (x_2+2)^2 \cdot y_1^2 \Leftrightarrow (my_1+4)^2 \cdot y_2^2 = (my_2+4)^2 \cdot y_1^2 \Leftrightarrow$$

$$my_1y_2 + 2(y_1+y_2) = 0.$$

而 $my_1y_2 + 2(y_1+y_2) = -4m + 4m = 0$,

所以 $\angle ABM = \angle ABN$.

解法 8: (参数方程法) 通过设出直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=2+t\cos\theta, \\ y=t\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为直线 } l \text{ 的倾斜角, } \theta \neq 0, t \text{ 为参数}), \text{ 引入参}$$

数, 结合直线 BM, BN 的斜率之和 $k_{BM} + k_{BN} = 0$ 的转化, 进而来确定直线 BM, BN 的倾斜角互补, 得以证明 $\angle ABM = \angle ABN$.

(1) 同方法 1;

(2) 设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+t\cos\theta, \\ y=t\sin\theta \end{cases}$ (θ 为直线 l 的倾

斜角, $\theta \neq 0, t$ 为参数), $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 其对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

代入 $y^2=2x$ 得 $t^2\sin^2\theta - 2t\cos\theta - 4 = 0$, 可知 $t_1+t_2 = \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}, t_1t_2 = -$

$$\frac{4}{\sin^2\theta}.$$

直线 BM, BN 的斜率之和为:

$$k_{BM} + k_{BN} = \frac{y_1}{x_1+2} + \frac{y_2}{x_2+2} = \frac{t_1\sin\theta}{t_1\cos\theta+4} + \frac{t_2\sin\theta}{t_2\cos\theta+4} =$$

$$\frac{2t_1t_2\sin\theta\cos\theta+4\sin\theta(t_1+t_2)}{(t_1\cos\theta+4)(t_2\cos\theta+4)} = \frac{-\frac{8\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{8\cos\theta}{\sin\theta}}{(t_1\cos\theta+4)(t_2\cos\theta+4)} = 0.$$

所以 $k_{BM} + k_{BN} = 0$, 可知 BM, BN 的倾斜角互补, 所以 $\angle ABM = \angle ABN$.

四、拓展变式

通过该题深入分析, 改变条件, 拓展思维, 可以得到意想不到的效果, 真正达到“认真解答一个题, 拓广解决一类题, 变式深化一片题, 思维能力一起高”的美好目的.

变式方向 1: 改变证明结论, 目标更为明确, 难度相当.

【变式 1】 设抛物线 $C: y^2=2x$, 点 $A(2, 0), B(-2, 0)$, 过点 A 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 BM 的方程;

(2) 试确定直线 BM, BN 的斜率之和 $k_{BM} + k_{BN}$ 是否为定值? 若是, 请求出该定值; 若不是, 请说明理由.

解析: (1) 当 l 与 x 轴垂直时, l 的方程为 $x=2$, 可得 M 的坐标为 $(2, 2)$ 或 $(2, -2)$,